www.r0x.it

Forum degli Studenti di Ingegneria
dell’Università di Salerno

Gestito da
Associazione StudentIngegneria
Sede: Aula T25/1 – 089/96-4166
studentingegneriasalerno@gmail.com
www.r0x.it – www.studentingegneria.it

ESAME DI MATEMATICA III – Prof. Scarpetta

Ingegneria Meccanica

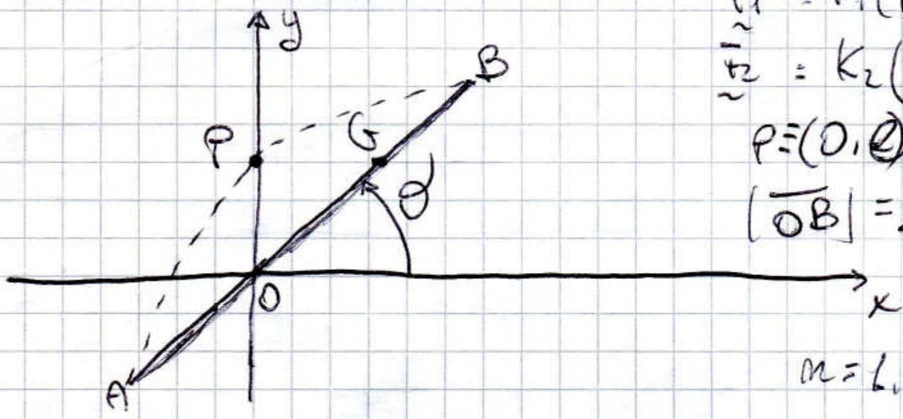
Prova scritta del 3 Giugno 2010

Nel piano verticale Oxy, un'asta rigida AB di massa M e lunghezza 3ℓ è vincolata a ruotare senza attrito attorno all'asse z in O di versore $\mathbf{e}_3$ (|OB| = 2|AO|); oltre alla reazione vincolare e alla forza peso, su di essa agiscono le forze elastiche $\boldsymbol{F}_1 = k_1(\mathrm{P}-\mathrm{A})$ applicata in A e $\boldsymbol{F}_2 = k_2(\mathrm{P}-\mathrm{B})$ applicata in B, ove P è il punto di coordinate $(0, \ell)$. Scrivere l'equazione pura del moto dell'asta, e calcolare le eventuali posizioni d'equilibrio, discutendone la stabilità, nei tre casi: $(2k_2 - k_1)\ell$ maggiore, uguale o minore di $Mg/2$. Calcolare inoltre la reazione vincolare in O all'equilibrio.

2) Nel piano verticale Oxy, un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi sulla circonferenza (scabra) di centro O e raggio R. Oltre alla forza peso e alla reazione vincolare, esso è soggetto alle forze attive $\boldsymbol{F}_1 = k(\mathrm{H}-\mathrm{P})$ e $\boldsymbol{F}_2 = \lambda(\mathrm{H}-\mathrm{P}) \times \mathbf{e}_3$, ove $\mathrm{H} \equiv (0,R)$. Scrivere l'equazione del moto del punto, e discutere l'equilibrio: nel caso liscio, per $kR = mg$ (con studio della stabilità); nel caso scabro, per $kR - mg = \lambda R - mg = \mu - 1/2 = 0$.

3) Nel piano Oxy, si consideri la figura costituita da un settore circolare retto di raggio R nel 1° quadrante a cui è sottratto un triangolo rettangolo isoscele che ha l'ipotenusa pari ad un raggio del settore e un cateto adagiato sull'asse x.
Si calcolino baricentro e matrice d'inerzia rispetto al punto O di tale figura.

Giugno 2010



$\underset{\sim}{F_1} = K_1(P-A)$ su A

$\underset{\sim}{F_2} = K_2(P-B)$, su B

$P \equiv (0, \ell)$

$|\overline{OB}| = 2|AO| = 2\ell$

$m = L$, $q = \vartheta \equiv x\hat{O}B$

$$\begin{cases} x_B = 2\ell\cos\vartheta \\ y_B = 2\ell \operatorname{sen}\vartheta \end{cases} \qquad \begin{cases} x_A = -\ell\cos\vartheta \\ y_A = -\ell \operatorname{sen}\vartheta \end{cases}$$

$$|OG| = \frac{\ell}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{\ell}{2}\cos\vartheta \\ y_G = \frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\vartheta \end{cases}$$

$$F_{1x} = K_1(x_P - x_a) = K_1(+\ell\cos\vartheta$$

$$F_{1y} = K_1(y_P - y_a) = K_1\ell(1+\operatorname{sen}\vartheta)$$

$$F_{2,x} = K_2(x_P - x_B) = -2K_2\ell\cos\vartheta$$

$$F_{2,y} = K_2(y_P - y_B) = K_2(\ell - 2\ell\operatorname{sen}\vartheta) = K_2\ell(1-2\operatorname{sen}\vartheta)$$

$$I_z = I_{G,z} + M\frac{\ell^2}{4} = \frac{1}{12}M(3\ell)^2 + M\frac{\ell^2}{4} = M\ell^2\left(\frac{9}{12} + \frac{1}{4}\right) = M\ell^2$$

$$I_z\ddot{\vartheta} = M_z^{(e,a)} = (G-O)\times Mg\,\underset{\sim}{e_3} + (A-O)\times \underset{\sim}{F_1}\cdot\underset{\sim}{e_3} + (B-O)\times\underset{\sim}{F_2}\cdot\underset{\sim}{e_3}$$

$$M_z^{(e,a)} = \begin{vmatrix} \frac{\ell}{2}\cos\vartheta & \frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\vartheta & 0 \\ 0 & -Mg & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + K_1\begin{vmatrix} -\ell\cos\vartheta & -\ell\operatorname{sen}\vartheta & 0 \\ \ell\cos\vartheta & \ell(1+\operatorname{sen}\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+K_2\begin{vmatrix} 2\ell\cos\vartheta & 2\ell\operatorname{sen}\vartheta & 0 \\ -2\ell\cos\vartheta & \ell(1-2\operatorname{sen}\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -Mg\frac{\ell}{2}\cos\vartheta + K_1\left[-\ell^2\cos\vartheta(1+\operatorname{sen}\vartheta\right.$$

$+ \ell^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta \Big] + K_2\Big[2\ell^2\cos\theta(1 - 2\operatorname{sen}\theta) + 4\ell^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\Big]$

$M_z^{(e,a)}(\theta) = -Mg\frac{\ell}{2}\cos\theta - K_1\ell^2\cos\theta + 2K_2\ell^2\cos\theta =$

$= \ell\cos\theta\left(-\frac{Mg}{2} - K_1\ell + 2K_2\ell\right) = M\ell^2\ddot{\theta}$

Nel caso 1) $(2K_2 - K_1)\ell > Mg/2$;

2) $\quad$ // $\quad$ // $=$ //

3) $\quad$ // $\quad$ // $<$ //

discutere la stabilità

Nel 1° caso: $M_z^{(e,a)}(\theta) = \Big[\underbrace{(2K_2 - K_1)\ell - \frac{Mg}{2}}_{\neq 0,\ >0}\Big]\ell\cos\theta$

$M_z^{(e,a)}(\theta_e) = 0 \Rightarrow \cos\theta_e = 0 \Rightarrow \theta_e = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$

$M_z^{(e,a)} = U'(\theta) \Rightarrow U''(\theta) = -\Big[(2K_2 - K_1)\ell - \frac{Mg}{2}\Big]\ell\operatorname{sen}\theta$

$U''\left(\theta_e = \frac{\pi}{2}\right) < 0 \quad \pi/2$ stabile

$U''\left(\theta_e = \frac{3}{2}\pi\right) > 0 \quad \frac{3\pi}{2}$ instabile

2° caso $\quad M_z^{(e,a)} = \Big[(2K_2 - K_1)\ell - \frac{Mg}{2}\Big]\ell\cos\theta \equiv 0 \ \forall\theta \Rightarrow$

l'eq. è un'identità quindi equilibrio indifferente $\forall\theta_e$

3° caso

$M_z^{(e,a)} = \Big[\underbrace{(2K_2 - K_1)\ell - \frac{Mg}{2}}_{\neq 0\ \ <0}\Big]\ell\cos\theta$

quindi $\theta_e = \pi/2$ e $\frac{3}{2}\pi$ ma

$U''\left(\theta_e = \frac{\pi}{2}\right) > 0 \quad \pi/2$ stabile

$U''\left(\theta_e = \frac{3}{2}\pi\right) < 0 \quad \frac{3}{2}\pi$ instabile

$R_e^{(e,a)} + R^{(e,v)} = 0 \Rightarrow \underline{\Phi}_0 + M\underline{g} + \underline{F}_1 + \underline{F}_2 = \underline{0}$

$\bar{\Phi}^{e}_{0,x} = \cancel{Mg} - F_{1,x} - F_{2,x} = -k_1 l \cos\theta_e + 2k_2 l \cos\theta_e$

$\bar{\Phi}_{0,x}(\pi/2) = 0 \quad ; \quad \bar{\Phi}_{0,x}(\frac{3}{2}\pi) = 0$

www.r0x.it

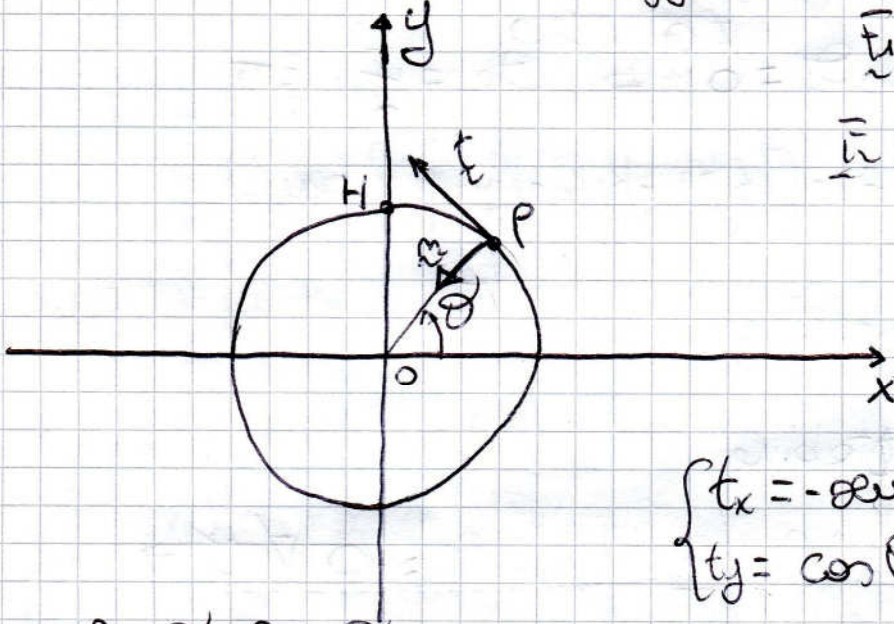
$\bar{\Phi}_{0,y}(\theta_e) = +Mg - F_{1,y} - F_{2,y} = Mg - k_1 l(1 - \operatorname{sen}\theta_e) - k_2 l(1 - 2\operatorname{sen}\theta_e)$

$\bar{\Phi}_{0,y}(\frac{\pi}{2}) = Mg - 2k_1 l + k_2 l$

$\bar{\Phi}_{0,y}(\frac{3}{2}\pi) = Mg - 3k_2 l$

n° 2

Circonferenza a centro O e raggio R



$\underset{\sim}{F_1} = k(H - P) \qquad H \equiv (0, R)$

$\underset{\sim}{F_2} = \lambda(H - P) \times \underset{\sim}{e_3}$

$m = 1$

$\begin{cases} t_x = -\operatorname{sen}\theta \\ t_y = \cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} n_x = -\cos\theta \\ n_y = -\operatorname{sen}\theta \end{cases}$

$\begin{cases} x_P = x_C + R\cos\theta = R\cos\theta \\ y = R\operatorname{sen}\theta \end{cases}$

$F_{1,x} = k(x_H - x_P) = -kR\cos\theta$

$F_{1,y} = k(y_H - y_P) = kR(1 - \operatorname{sen}\theta)$

$$F_{2,x} = \lambda(H - P) \times \underset{\sim}{e_3} \cdot \underset{\sim}{e_1} = \lambda \begin{array}{ccc} x_H - x_P & y_H - y_P & \\ \end{array} \begin{vmatrix} -R\cos\theta & R(1 - \operatorname{sen}\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$= \lambda R(1 - \operatorname{sen}\theta)$

$$F_{2,y} = \lambda(H-P) \times \underset{\sim}{e}_3 \cdot e_2 = \lambda \begin{vmatrix} -R\cos\theta & -R(1-\operatorname{sen}\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$= \lambda R \cos\theta$

Caso liscio

$$mR\ddot{\theta} = \mathcal{F}_t = -mg\cos\theta - KR\cancel{\cos}(\cancel{-\operatorname{sen}\theta}) + KR(1-\cancel{\operatorname{sen}\theta})\cos\theta +$$
$$+ \lambda R(1-\operatorname{sen}\theta)(-\operatorname{sen}\theta) + \lambda R\cos\theta(\cos\theta)$$

$$mR\ddot{\theta} = -mg\cos\theta + KR\cos\theta - \lambda R\operatorname{sen}\theta + \lambda R$$

se $KR = mg \rightarrow$

$$mR\ddot{\theta} = \cancel{-mg\cos\theta} \cancel{+mg\cos\theta} - \lambda R\operatorname{sen}\theta + \lambda R \rightarrow$$

$$\mathcal{F}_t(\theta) = \lambda R(1-\operatorname{sen}\theta)$$

equilibrio $\rightarrow \lambda R(1-\operatorname{sen}\theta_e) = 0 \quad \operatorname{sen}\theta_e = 1 \quad \theta_e = \pi/2$

$\mathcal{F}_t(\theta) = \frac{1}{R}U'(\theta) \rightarrow U''(\theta) = -\lambda R^2\cos\theta \Rightarrow U''(\theta_e) = 0$ quindi è instabile

Reaz. vincolare

$$mR\dot{\theta}^2 = \Phi_n + \mathcal{F}_n \Rightarrow \Phi_n = mR\dot{\theta}^2 - \mathcal{F}_n = \cancel{mR\dot{\theta}^2}$$

$$= mR\dot{\theta}^2 - \{\cancel{+}mg\operatorname{sen}\theta \cancel{+ KR\cos^2\theta}\ KR\cos\theta(-\cos\theta) +$$
$$+ KR(1-\operatorname{sen}\theta)(-\operatorname{sen}\theta) + \lambda R(1-\cancel{\operatorname{sen}\theta})(-\cos\theta) + \cancel{\lambda R\cos\theta(\operatorname{sen}\theta)}\}$$

$$\Phi_n = mR\dot{\theta}^2 - mg\operatorname{sen}\theta - KR + KR\operatorname{sen}\theta + \lambda R\cos\theta$$

$$\Phi_n^e = \Phi_n(\theta_e = \tfrac{\pi}{2}) = -mg + KR - KR = -mg$$

Caso scabro

$KR - mg = \lambda R - mg = \mu - \frac{1}{2} = 0$

$$|\Phi_t(\theta_e)| \leq \mu|\Phi_n(\theta_e)| \Rightarrow \Phi_t^e = -\mathcal{F}_t \text{ e } \Phi_n^e = -\mathcal{F}_n$$

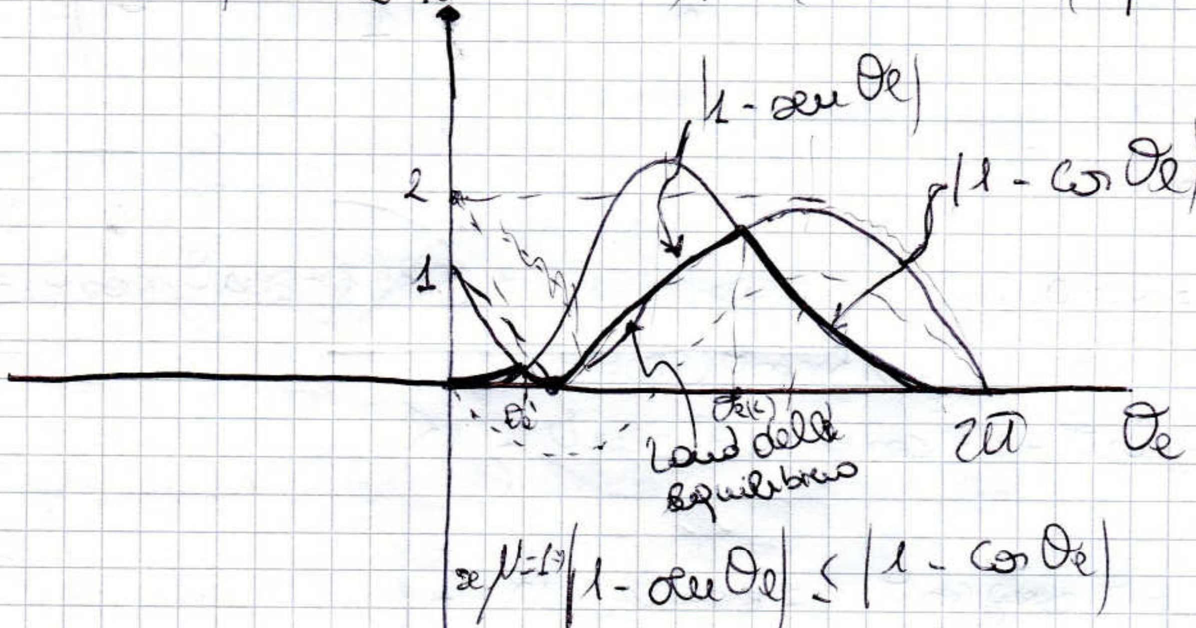
quindi $|\mathcal{F}_t(\theta_e)| \leq \mu|\mathcal{F}_n(\theta_e)| \Rightarrow |\cancel{mg\cos\theta_e} + \cancel{KR\cos\theta_e} - \lambda R\operatorname{sen}\theta_e + \lambda R| \leq$

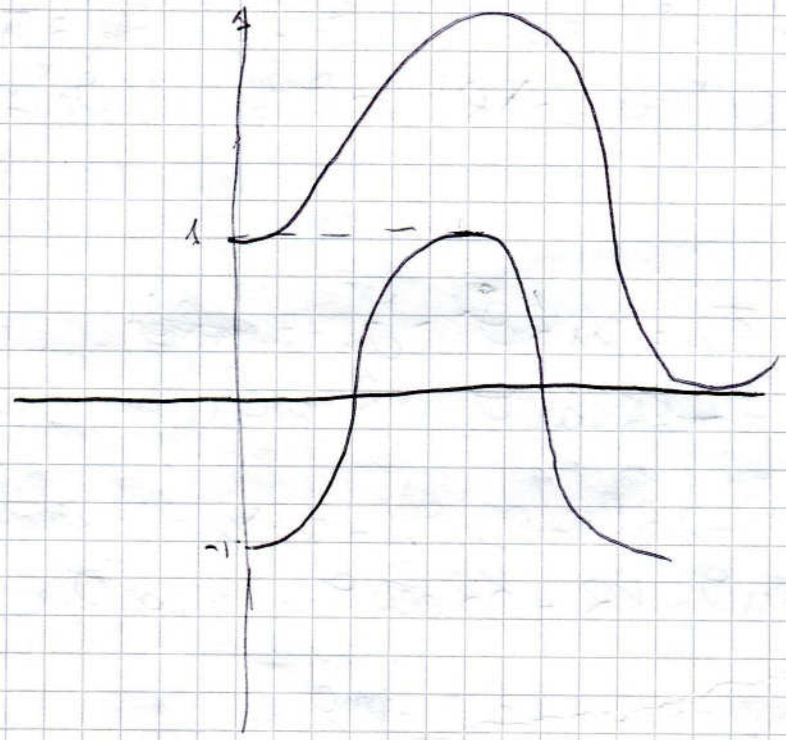
$$\leq \mu|mg\cancel{\operatorname{sen}}\theta_e + \underset{=\lambda R}{KR} - KR\cancel{\operatorname{sen}}\theta_e - \lambda R\cos\theta_e|$$

www.r0x.it

$$\left|\lambda R(1-\operatorname{sen}\theta_e)\right| \leq \frac{1}{2}\left|\lambda R(1-\cos\theta_e)\right|$$

$$\left|1-\operatorname{sen}\theta_e\right| \leq \frac{1}{2}\left|(1-\cos\theta_e)\right| = \left|(2-2\operatorname{sen}\theta_e)\right| \leq \left|1-\cos\theta_e\right|$$



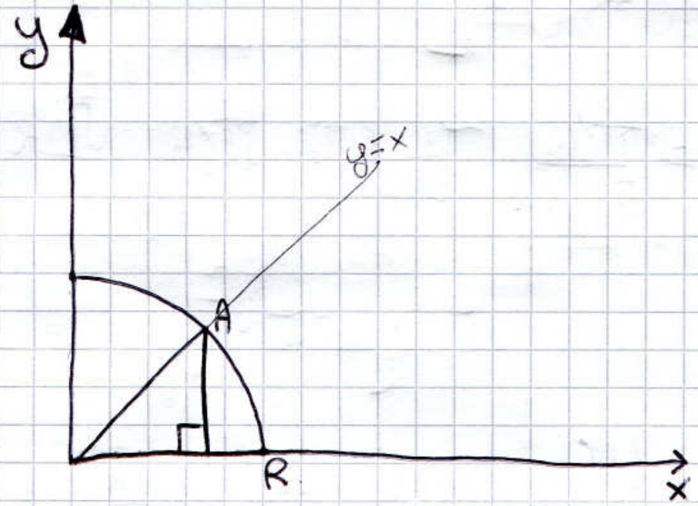


$\theta_e^{(1)} \Rightarrow 1-\operatorname{sen}\theta_e = 1-\cos\theta_e \Rightarrow \operatorname{sen}\theta_e = \cos\theta_e \Rightarrow \theta_e^{(1)} = \pi/4$

$\theta_e^{(2)} \Rightarrow 1-\operatorname{sen}\theta_e = 1-\cos\theta_e \Rightarrow \operatorname{sen}\theta_e = \cos\theta_e \Rightarrow \frac{5}{4}\pi$

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta_e \leq \frac{5}{4}\pi$$

Es n° 3



$x_A = R\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_A = \frac{\sqrt{2}}{2}$

1: settore, $A_1 = \frac{\pi}{4}R^2$

$G_1 = \left(\frac{4}{3\pi}R, \frac{4}{3\pi}R\right)$

2: triangolo $A_2 = \frac{1}{4}R^2$

$D_2 = \left\{ 0 \le x \le \frac{\sqrt{2}}{2}R \, , \; 0 \le y \le x \right\}$

$$A_2 = \iint_{D_2} dx\,dy = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}R} \left(\int_0^x dy \right) dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}R} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}R} = \frac{1}{4}R^2$$

$$x_{G_2} = \frac{1}{A_2} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}R} x \left(\int_0^x dy \right) dx = \frac{4}{R^2} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}R} x^2\,dx = \frac{4}{R^2}\left[\frac{x^3}{3}\right] = \frac{\cancel{4}}{\cancel{R^2}} \frac{2\sqrt{2}}{24 \cdot 3}R^3$$

$\frac{\sqrt{2}}{3}R$

$$y_{G_2} = \frac{1}{A_2} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}R} \int_0^x y\,dx\,dy = \cancel{\frac{4}{R^2} \frac{\sqrt{2}}{2}R \left[\frac{y^2}{2}\right.} \; \frac{4}{R^2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}R} \frac{x^2}{2}\,dx =$$

$$= \frac{4}{R^2}\left[\frac{x^3}{6}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}R} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{R^2}} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{4}} R^3 = \frac{\sqrt{2}}{6}R$$

$x_{G_2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}R, \frac{\sqrt{2}}{6}R\right)$

$$3: \; A_3 = A_1 - A_2 = \frac{\pi}{4}R^2 - \frac{1}{4}R^2 = \frac{R^2}{4}(\pi - 1)$$

$$x_{G_3} = \frac{A_1}{A_3} \cdot x_{G_1} - \frac{A_2}{A_3} x_{G_2} = \frac{\cancel{4}\,\pi\,\cancel{R^2}}{\cancel{4}\,\cancel{R^2}(\pi-1)} \cdot \frac{4}{3\pi}R - \frac{1\,R^2 \cdot 4}{\cancel{4}(\pi-1)} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}R =$$

$$x_{G_3} = \left[\frac{4}{3(\pi-1)} - \frac{\sqrt{2}}{3(\pi-1)}\right] R = \left(\frac{4-\sqrt{2}}{3(\pi-1)}\right) R$$

$$y_{G_3} = \frac{A_1}{A_3} \cdot y_{G_1} + \frac{A_2}{A_3} y_{G_2} = \frac{\pi/4}{(\pi-1)/4} \frac{4}{3\pi} R - \frac{\pi/4}{(\pi-1)/4} \frac{\sqrt{2}}{6} R$$

$$\frac{4-\sqrt{2}}{6(\pi-1)} \cdot R$$

$$I_x^{(1)} = \mu \int_0^R \int_0^{\pi/2} \rho^3 \operatorname{sen}^2\vartheta \, d\rho \, d\vartheta = \frac{1}{4} \mu R^4 \frac{\pi}{4} = \frac{M_1 R^2}{4}$$

$$I_y^{(1)} = \frac{1}{4} M_1 R^2$$

$$I_{xy}^{(1)} = -\mu \int_0^R \int_0^{\pi/2} \rho^3 \operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta \, d\rho \, d\vartheta = -\mu \frac{1}{4} R^4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{\pi}$$

$$= -\frac{1}{2\pi} M_1 R^2$$

$$I_x^{(2)} = \mu \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}R} dx \left(\int_0^x y^2 dy\right) = \mu \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}R} x^3 \, dx = \mu \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}R} =$$

$$= \mu \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{4} R^4 = \frac{1}{12} M_2 R^2$$

$$I_y^{(2)} = \mu \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}R} x^2 dx \left(\int_0^x dy\right) = \mu \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}R} x^3 \, dx = \frac{1}{4}\mu \left[x^4\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}R} =$$

$$= \frac{1}{16} \mu R^4 = \frac{1}{4} M_2 R^2$$

$$I_{xy}^{(2)} = -\mu \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}R} x \, dx \left(\int_0^x y \, dx\right) = -\frac{1}{2}\mu \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}R} x^3 \, dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\mu \left[x^3\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}R} = -\frac{1}{2}\mu \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} R^4 = -\frac{1}{8} M_2 R^2$$

$I_{\ell xy}$

$$\underline{\underline{I}}^{(0)}_{h,k} = R^2 \begin{vmatrix} \frac{M_1}{4} - \frac{M_2}{12} & -\frac{M_1}{2\pi} + \frac{M_2}{8} & 0 \\ -\frac{M_1}{2\pi} + \frac{M_2}{8} & \frac{M_1}{4} - \frac{M_2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M_1}{2} - \frac{1}{3} M_2 \end{vmatrix}$$

$r = y = x \qquad \alpha_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \alpha_3 = 0$

$$I_r = R^2 \cdot \left[\frac{1}{2}\left(\frac{M_1}{4} - \frac{M_2}{12}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{M_1}{4} - \frac{M_2}{4}\right) - \frac{M_1}{2\pi} + \frac{M_2}{8} \right.$$